Ασκήσεις:

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

1. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$

2. $(x+\sin y)dx+(x\cos y-2y)dy=0$

ΛΥΣΗ

1. Έχουμε

$$M(x,y)=e^{-y},\quad N(x,y)=-(2y+xe^{-y})$$

και άρα

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-e^{-y}=\frac{\partial N}{\partial x},$$

δηλ. η δοθείσα εξίσωση είναι ολικού διαφορικού. Τότε θα υπάρχει μια διαφορίσιμη συνάρτηση $g(x,y)$ τέτοια ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι ισότητες

$$\frac{\partial g}{\partial x}=M(x,y)=e^{-y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=N(x,y)=-(2y+xe^{-y}). \quad (2)$$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς x (θεωρώντας το y σταθερό) παίρνουμε ότι

$$g(x,y)=\int e^{-y}dx+h(y)=xe^{-y}+h(y), \quad (3)$$

όπου $h(y)$ είναι μια αυθαίρετη διαφορίσιμη συνάρτηση του y. Έτσι, παραγωγίζοντας την (3) ως προς y (θεωρώντας το x σταθερό) και αντικαθιστώντας στη (2) παίρνουμε

$$-xe^{-y}+h'(y)=-(2y+xe^{-y}),$$

ή

$$h'(y)=-2y. \quad (4)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα την τελευταία ως προς y έχουμε ότι

$$h(y) = -y^2$$

και άρα με αντικατάσταση στην (3)

$$g(x,y) = xe^{-y} - y^2.$$

Συνεπώς, η *γενική λύση* της δοθείσης εξίσωσης δίνεται από τη σχέση

$$xe^{-y} - y^2 = C,$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά.

Σημείωση: Η σταθερά ολοκλήρωσης της ενδιάμεσης εξίσωσης (4) μπορεί πάντοτε να παραλείπεται αφού ενσωματώνεται με
τη σταθερά C της μορφής της γενικής λύσης.

2. Έχουμε

$$M(x,y) = x + \sin y, \; N(x,y) = x\cos y - 2y$$

και άρα

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y = \frac{\partial N}{\partial x},$$

δηλ. η δοθείσα εξίσωση είναι ολικού διαφορικού. Τότε θα υπάρχει μια διαφορίσιμη συνάρτηση $g(x,y)$ τέτοια ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι ισότητες

$$\frac{\partial g}{\partial x} = M(x,y) = x + \sin y, \quad (1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = N(x,y) = x\cos y - 2y. \quad (2)$$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς x (θεωρώντας το y σταθερό) παίρνουμε ότι

$$g(x,y) = \int (x + \sin y)dx + h(y) = x^2/2 + x\sin y + h(y), \quad (3)$$

όπου $h(y)$ είναι μια αυθαίρετη διαφορίσιμη συνάρτηση του y. Έτσι, παραγωγίζοντας την (3) ως προς y (θεωρώντας το x σταθερό) και αντικαθιστώντας στη (2) παίρνουμε

$$x\cos y + h'(y) = x\cos y - 2y,$$

ή

$$h'(y) = -2y. \quad (4)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα την τελευταία ως προς y έχουμε ότι

$$h(y) = -y^2$$

και άρα με αντικατάσταση στην (3)

$$g(x,y) = x^2/2 + x\sin y - y^2.$$

Συνεπώς, η *γενική λύση* της δοθείσης εξίσωσης δίνεται από τη σχέση

$$x^2/2 + x\sin y - y^2 = 0,$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά.